

Title	Riemann 空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て (III)
Author(s)	朝長, 康郎
Citation	全国紙上数学談話会. 2(10) p.299-p.301
Issue Date	1948-07-25
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75233">https://doi.org/10.18910/75233</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 99. Riemann 空間の上で定義された或る種のベクトル空間に就て(値)

朝長 康郎 (6.13)

§7. Holonomy 群が二つの独立な超球  $V^\lambda, W^\lambda$  を固定する場合

此の時は,

$$(7.1) \quad \begin{cases} \widehat{A} \frac{\partial V^i}{\partial x^R} + \Gamma_{jk}^i V^j + \Gamma_{0R}^i V^0 + \delta_R^i = 0, & \frac{\partial V^0}{\partial x^R} + \Gamma_{jR}^0 V^j = 0 \\ \widehat{B} \frac{\partial W^i}{\partial x^R} + \Gamma_{jk}^i W^j + \Gamma_{0R}^i W^0 + \delta_R^i = 0, & \frac{\partial W^0}{\partial x^R} + \Gamma_{jR}^0 W^j = 0 \end{cases}$$

であるから 今  $A$  を常数として

$$(7.2) \quad X^\lambda = AV^\lambda + (1-A)W^\lambda$$

なる超球を選れば之又 Holonomy 群に固定される. 即ち,

$$(7.3) \quad \frac{\partial X^i}{\partial x^R} + \Gamma_{jk}^i X^j + \Gamma_{0R}^i X^0 + \delta_R^i = 0, \quad \frac{\partial X^0}{\partial x^R} + \Gamma_{jR}^0 X^j = 0.$$

由て §5 の議論が  $X^\lambda$  にも適用されて,  $X_i$  が切触ベクトルとなり

$$(7.4) \quad X^i = AV^i + (1-A)W^i = g^{ia} \frac{\partial}{\partial x^a} \{ A\psi + (1-A)\psi \}$$

但し,

$$(7.5) \quad V^i = g^{ia} \frac{\partial \psi}{\partial x^a}, \quad W^i = g^{ia} \frac{\partial \psi}{\partial x^a}$$

とする. 又 (5.14) と同様

$$(7.6) \quad g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = -2 \{ A\psi + (1-A)\psi \} + const$$

である. 即ち 点  $x^i$  から超球  $X^\lambda$  に沿る共通の線は,

$A\psi + (1-A)\psi = const$ , で定まる超曲面上では一定である. (7.1) で  $A$  を変へれば  $\infty'$  の超球群が出来る. それ等はどれも Holonomy の群に固定される. 今其の中で  $R_n$  と交はるものが存在する場合即ち

$$(7.7) \quad g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0$$

が成る  $X^i$  の領域で満足される様な  $X^\lambda = AV^\lambda + (1-A)W^\lambda$  が存在する場合を考へよう。 (7.7) が成立つことは

$$(7.8) \quad g_{\lambda\mu} (AV^\lambda + (1-A)W^\lambda) (AV^\mu + (1-A)W^\mu) = 0$$

即ち  $A$  に關する次の二次方程式が実根を有つ場合である。

$$(7.9) \quad A^2 \{ g_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu + g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu - 2g_{\lambda\mu} V^\lambda W^\mu \} \\ + 2A (g_{\lambda\mu} V^\lambda W^\mu - g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu) + g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu = 0$$

判別式を考へれば

$$(7.10) \quad (g_{\lambda\mu} V^\lambda W^\mu - g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu)^2 - (g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu) (g_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu - 2g_{\lambda\mu} V^\lambda W^\mu + g_{\lambda\mu} W^\lambda W^\mu) \geq 0$$

が成る  $X^i$  の領域で成立つ場合である。  $A$  を決めれば (7.8) は一つの超曲面を定める。この超曲面上では (7.6) から  $A\varphi + (1-A)\psi = \text{const.}$  であるから其の法線が  $X^i$  と比例する。而し (7.7) から超曲面上の点から  $X^\lambda$  迄の共逐切線距離は 0 であるから  $X^\lambda$  はこの超曲面に接觸する超球である。又  $X^\lambda$  は、この超曲面に沿つて度消されても動かないから §4 で環れたもので今後、W-超曲面 と呼ぶことにする。其の方程式は (4.12) から

$$(7.11) \quad \begin{cases} \rho(-H^S_A + \varepsilon \Gamma_{0k}^L \varepsilon_L^B \varepsilon_A^R) + \delta_A^0 = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial u^A} + \Gamma_{ij}^r \delta n^i \varepsilon_A^j = 0 \end{cases}$$

但  $X^i = X^i(u^A)$  を超曲面のパラメータ表示とし

$$\varepsilon_A^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^A}, \quad \varepsilon_L^B = g_{ij} g^{AB} \varepsilon_A^j, \quad \varepsilon = \pm 1$$

とする。即ち (7.10) が成立つ領域には  $\infty$  の W-超曲面が存在する。その直交曲線は  $A$  をパラメータに選べば次の形における。

$$(7.12) \quad \frac{dx^i}{dA} \pi(A) = AV^i + (1-A)W^i$$

(7.8) から

$$(7.13) \quad \pi(A) = \frac{AV^0 + (1-A)W^0}{\frac{dS}{dA}}$$

(但し、 $S$  は曲線の弧長とする。) でなければならぬ。

$$(7.14) \quad \begin{cases} \frac{dV}{dA} + \Gamma_{jk}^i V^j \frac{dx^k}{dA} + \Gamma_{0k}^i V^0 \frac{dx^k}{dA} + \frac{dx^i}{dA} = 0, & \frac{dV^0}{dA} + \Gamma_{ij}^0 V^i \frac{dx^j}{dA} = 0 \\ \frac{dW^i}{dA} + \Gamma_{jk}^i W^j \frac{dx^k}{dA} + \Gamma_{0k}^i W^0 \frac{dx^k}{dA} + \frac{dx^i}{dA} = 0, & \frac{dW^0}{dA} + \Gamma_j^0 W^j \frac{dx^j}{dA} = 0 \end{cases}$$

が成立つから (7.12) を更に直線化して微分すれば、

$$(7.15) \quad P \frac{\delta^2 \chi^i}{\delta A^2} + R \frac{dx^i}{dA} + R \Gamma_{0k}^i \frac{dx^k}{dA} = V^i - W^i$$

の形になる。但し、

$$\frac{\delta^2 \chi^i}{\delta A^2} = \frac{d^2 \chi^i}{dA^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dA} \frac{dx^k}{dA}$$

特に  $\Gamma_{0k}^i = C \delta_{0k}^i$  ( $C$  = 定数) の場合は、 $W$ -超曲面は、固有全屈折曲面となる。 (7.14) と (7.15) から

$$(7.16) \quad \frac{\delta^3 \chi^i}{\delta S^3} + L \frac{\delta^2 \chi^i}{\delta S^2} + M \frac{dx^i}{dS} = 0$$

が導かれる。 ( $L, M$  は或る  $S$  の函数)

以上を総合すれば、

[定理] Holonomy群が2つの独立な球  $V^\lambda, W^\lambda$  を固定する時、若し (2K) の成立つ領域が在れば其の中には  $\infty^1$  の  $W$ -超曲面が存在し、其の直截二次は (7.15) の形になる。特に  $\Gamma_{ij}^0 = C g_{ij}$  ( $C$  = 定数) のときは  $\infty^1$  の固有全屈折曲面が存在し其の直截曲線は (7.16) の形になる。 [1948. 6. 10]